



Wykorzystanie przedziałów ufności do oceny liniowości charakterystyki przetwarzania przetworników pomiarowych

Przemysław Otomański*

1. Wstęp

W wielu zagadnieniach praktycznych, badania związku między zmiennymi losowymi X_1 i X_2 sprowadzają się często do wykrycia związku pomiędzy pobudzeniem X , a obserwowanym skutkiem Y , czyli odpowiedzią danego układu fizycznego. Badamy wówczas związki pomiędzy zmiennymi X i Y . Pomiar tych wielkości można traktować jako współrzędne punktów na płaszczyźnie.

Analiza korelacyjna pozwala wyznaczyć stopień powiązania między badanymi zmiennymi losowymi. Potrzebny jest jednak opis, na podstawie którego można by dokonać przewidywań w odniesieniu do jednej zmiennej przy założeniu wartości pozostałych zmiennych. Aby zatem określić zależności funkcyjne, należy różne wartości zmiennej zależnej, jaką jest zmienna losowa Y , zastąpić jedną wartością. Założmy, że wartością tą będzie warunkowa wartość oczekiwana:

$$E(Y|X=x) \quad (1)$$

Jest to wartość oczekiwana zmiennej losowej Y , gdy zmienna losowa X przyjmuje wartość x . Warunkowa wartość oczekiwana jest więc funkcją zmiennej niezależnej X

$$E(Y|X=x) = f(x) \quad (2)$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją regresji pierwszego rodzaju, a jej graficzny obraz – linią regresji pierwszego rodzaju. W ogólnym przypadku funkcja regresji może mieć bardzo złożoną postać. Dlatego w praktyce rozpatruje się tylko pewne klasy funkcji, których kształt można określić. Najczęściej stosowaną funkcją jest liniowa funkcja regresji o równaniu

$$f(x) = \alpha + \beta \cdot x \quad (3)$$

Obrazem graficznym takiej funkcji jest prosta, jeżeli spełniony jest warunek, że współczynnik korelacji między zmiennymi X i Y jest równy jedności $\rho = 1$. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, to linia regresji pierwszego rodzaju nie jest linią prostą. Szukamy zatem takiej funkcji liniowej, której obrazem graficznym będzie prosta, również dla $\rho \neq 1$.

Ponieważ przebieg funkcji $f(x)$ wyznaczają parametry α i β , to szukamy takich ich wartości, aby wartość funkcji $f(x)$ była jak



PPUP SILESIA PROJEKT Sp. z o.o.

Generalne Przedstawicielstwo w Polsce

firmy FRITSCH GmbH LABORGERÄTEBAU

Profesjonalne przyrządy laboratoryjne

PULVERISETTE
ANALYSETTE
LABORETTE

- do rozdrabniania
- do określania rozkładu uziarnienia
- do dzielenia i podawania



ZAPEWNIAMY:

- dostawę sprzętu
- autoryzowany serwis gwarancyjny i pogwarancyjny
- doradztwo techniczne
- uruchomienia z atestem IQ i OQ
- szkolenia

ul. Żeromskiego 7, 40-709 Katowice
tel. 032 782 03 76, fax 032 202 33 46
e-mail: silesiap@silesia-projekt.com.pl

najbliższa wartości y . Założenie to realizuje się zwykle przyjmując, że wartość oczekiwana kwadratu odchylenia y od wartości funkcji $f(x)$ powinna osiągnąć minimum.

$$E[y - f(x)]^2 = \min \quad (4)$$

Po spełnieniu tego warunku funkcja $f(x) = \alpha + \beta \cdot x$ staje się funkcją regresji drugiego rodzaju i stanowi pewne oszacowanie funkcji regresji pierwszego rodzaju. Błąd tego oszacowania można przedstawić w postaci:

$$\varepsilon = E[y - f(x)]^2 \quad (5)$$

Obrazem graficznym funkcji regresji drugiego rodzaju jest prosta. Można więc mówić o regresji liniowej również wówczas, gdy $\rho \neq 1$. Jeżeli $\rho = 1$ obie linie regresji, pierwszego i drugiego rzędu, pokrywają się.

Parametr β nazywamy współczynnikiem regresji. Jest to współczynnik kątowy prostej, równy $\tan \gamma$, gdzie γ jest kątem zawartym pomiędzy osią x i prostą. Gdy $\gamma > 0$, prosta jest rosnąca, gdy $\gamma < 0$ – malejąca.

Parametr a nazywamy współczynnikiem przesunięcia.

2. Empiryczna prosta regresji

Estymatory parametrów a i β wyznaczamy z próby i oznaczamy symbolami, odpowiednio a i b . Równanie regresji określone na podstawie wyników z próby przyjmuje wówczas postać:

$$y = a + b \cdot x \quad (6)$$

Oznaczmy symbolem y' wartość uzyskaną z równania regresji po podstawieniu za x wartości x_i :

$$y' = a + b \cdot x_i \quad (7)$$

Jak wynika z tego zapisu i -ty element próby ma dwie wartości cechy Y : y_i – zmierzoną i y' – przewidywaną. Wartości te na ogół różnią się między sobą. Natomiast linia regresji powinna być tak przeprowadzona, aby suma kwadratów różnic pomiędzy y_i a y' była minimalna.

$$e = \sum_{i=1}^n (y_i - y')^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i)^2 = \min \quad (8)$$

Kryterium doboru prostej regresji teoretycznej, minimalizujące wartość oczekiwaną kwadratu różnicy $E[y - f(x)]^2$, zastępujemy warunkiem minimalizacji sumy kwadratów, stosując znaną metodę najmniejszych kwadratów. Wartości parametrów a i b uzyskujemy rozwiązując układ równań:

$$\frac{\partial e}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial b} = 0 \quad (9)$$

Rozwiązaniem tego układu równań są:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (10)$$

Można wykazać, że średnie arytmetyczne

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{oraz} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (11)$$

spełniają równanie $\bar{y} = a + b \cdot \bar{x}$. Wówczas wyrażenia na a i b można przekształcić do postaci:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} \quad (12)$$

Jeżeli licznik i mianownik wyrażenia na b podzielimy przez $n - 1$, otrzymamy:

- w mianowniku wariancje cechy X $\bar{S}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

- w liczniku kowariancje $\bar{S}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
cech X i Y

Wówczas parametr b można zapisać jako $b = \frac{\bar{S}_{xy}}{\bar{S}_x^2}$

Ponieważ kowariancja zmiennych losowych niezależnych jest równa zero, to dla niezależnych X i Y współczynnik regresji $b = 0$.

3. Niepewność oceny estymatorów regresji

Zakładając rozkład normalny zmiennej Y , przy danej wartości zmiennej X można wykazać [1], że parametry a i b są nieobciążonymi estymatorami odpowiednio α i β , przy czym ich rozkład z próby związany jest z rozkładem Studenta dla $m = n - 2$ stopni swobody. Pozwala to na wyznaczenie przedziałów ufności dla a i β , oraz dla wartości funkcji $f(x)$ dla określonej wartości $x - x_0$. Dokonując obliczeń dla wielu wartości x otrzymuje się przedział ufności dla całej wyznaczonej linii regresji.

Przedziały ufności wyznaczono zgodnie z zależnościami [2]:

$$P(a - U_a < \alpha < a + U_a) = 1 - \alpha \quad (13)$$

$$P(b - U_b < \beta < b + U_b) = 1 - \alpha \quad (14)$$

$$P\left(y' - U_{y'} < f(x) < y' + U_{y'}\right) = 1 - \alpha \quad (15)$$



Można wykazać, że niepewności rozszerzone U są opisane zależnościami:

$$U_a = t_{\alpha m} \cdot S_y \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (16)$$

$$U_b = t_{\alpha m} \cdot S_y \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (17)$$

$$U_{y'} = t_{\alpha m} \cdot S_y \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (18)$$

gdzie:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-2}}$$

S_y - jest odchyleniem standardowym z próby obserwowanych wartości y_i względem $\bar{y}$,

$t_{\alpha m}$ - jest zmienną standaryzowaną zmienną Studenta odczytywaną z tablic rozkładu Studenta dla prawdopodobieństwa $1 - \alpha$ i liczby stopni swobody $m = n - 2$.

4. Przykład obliczeniowy

W celu lepszego zrozumienia prezentowanej tematyki zostanie przedstawiony przykład obliczeniowy, który pozwoli przybliżyć praktyczne wykorzystanie przedziałów ufności do oceny liniowości charakterystyki przetwarzania przetwornika pomiarowego.

W badaniach wykorzystano wyniki uzyskane podczas badań charakterystyki przetwarzania przykładowego czujnika TMP-01, który należy do najnowszej generacji układów łączących własności czujnika i regulatora temperatury. Czujnik ten generuje napięcie wyjściowe – U_{wy} proporcjonalne do temperatury bezwzględnej T mierzonej przez czujnik.

Wyniki przeprowadzonych pomiarów zależności napięcia wyjściowego z czujnika U_{wy} w funkcji zadawanej temperatury T przedstawiono w tablicy 1.

Na rys. 1 zaprezentowano, w postaci punktów pomiarowych, charakterystykę przetwarzania $U_{wy} = f(T)$ badanego czujnika-regulatora temperatury.

Jak wynika z rys.1 istnieje wyraźna liniowa tendencja zwiększania się napięcia wyjściowego z czujnika U_{wy} w funkcji wartości temperatury T . Na podstawie wyników z próby zawartych

Tablica 1. Zestawienie wyników pomiarów obrazujących wpływ zadanej temperatury T na wartość napięcia wyjściowego U_{wy} badanego czujnika.

L.p.	T	U_{wy}
	°C	V
1	30	1,508
2	35	1,535
3	40	1,560
4	45	1,584
5	50	1,607
6	55	1,626
7	60	1,648
8	65	1,684
9	70	1,706
10	75	1,730
11	80	1,748
12	85	1,767
13	90	1,804
14	95	1,828
15	100	1,841
16	105	1,866
17	110	1,904
18	115	1,926
19	120	1,962

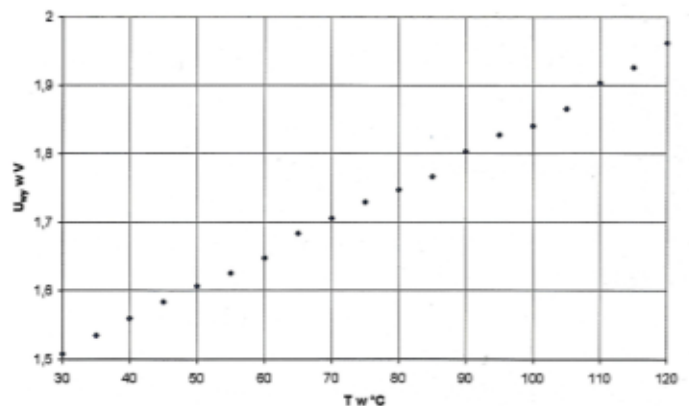
w tablicy 1 wyznaczono estymatory współczynnika korelacji dla zmiennych T i U_{wy} dla badanego zakresu temperatur.

Po wykonaniu obliczeń otrzymano $r_{T,U_{wy}} = 0,999$.

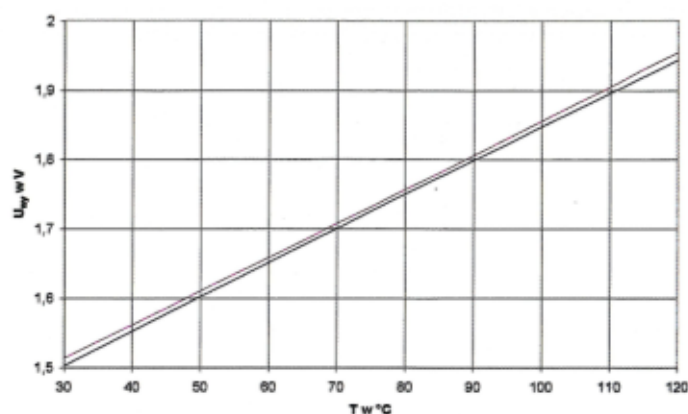
Przyjęto zatem równanie regresji liniowej dla opisu zależności pomiędzy temperaturą T a wyjściowym napięciem U_{wy} z czujnika TMP-01.

Liczbowe wartości parametrów a i b wyznaczono korzystając z metody najmniejszych kwadratów. Zgodnie z tą metodą wartości parametrów dobrane zostały tak, aby minimalizować sumę kwadratów różnic między wartościami obserwowanymi U_{wy} a estymowaną wartością oczekiwaną $U'_{wy} = a + b \cdot T$.

Korzystając z zależności (15), (18) i (19), dokonując obliczeń dla



Rys. 1 Statyczna charakterystyka przetwarzania badanego czujnika przedstawiona w postaci punktów pomiarowych



Rys. 2 Wyznaczony przedział ufności dla linii regresji, z założonym prawdopodobieństwem $1 - \alpha = 0,95$

wielu wartości T , otrzymano przedział ufności dla całej wyznaczonej linii regresji z założonym prawdopodobieństwem $1 - \alpha$. Na rys. 2 przedstawiono wyznaczony przykładowy przedział ufności, dla prawdopodobieństwa $1 - \alpha = 0,95$ w badanym zakresie temperatur.

5. Podsumowanie

Otrzymane wyniki pomiarów, przykładowo zaprezentowane na rys. 1, świadczą o dobrej liniowości badanego czujnika. Uzasadniało to przyjęcie modelu liniowego do opisu charakterystyki przetwarzania omawianego czujnika-regulatora. Uzyskany przedział ufności, dla prawdopodobieństwa $1 - \alpha = 0,95$ przedstawiony na rys.2 wskazuje na dobrą dokład-

ność modelu w postaci linii regresji, wyrażającego zależność napięcia U_{wy} na wyjściu czujnika od temperatury T mierzonej przez czujnik. Im wartość przedziału ufności jest mniejsza, wówczas aproksymacja charakterystyki przetwarzania jest bardziej dokładna.

Przedstawiona w pracy metoda oceny liniowości charakterystyki przetwarzania, za pomocą przedziałów ufności, jest jedną z możliwych metod. Przyjęcie określonego modelu równania podającego związek pomiędzy wartościami zmiennych pochodzących z pomiarów implikuje określonymi wartościami błędów. Przyjęcie modelu liniowego do opisu charakterystyki przetwarzania badanego separatora optoelektronicznego, jest często stosowane w praktyce ze względu na jego prostotę. Ostateczna decyzja o doborze równania, przybliżającego dane uzyskane w trakcie pomiarów, zależy oczywiście od eksperymentatora. Musi on dokonać wyboru pomiędzy żadaną wartością błędu aproksymacji a prostotą równania podającego związek pomiędzy wartościami zmiennych pochodzącymi z pomiarów.

Literatura

- [1] Turzeniecka D.: Ocena niepewności wyniku pomiarów, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 1997.
- [2] Dowdy S., Wearden S.: Statistics for research, John Wiley, New York, 1983.

* dr inż., Instytut Elektroniki i Telekomunikacji Politechniki Poznańskiej, Zakład Metrologii, e-mail: otoman@et.put.poznan.pl

Dokończenie ze strony 24.

- [3] R.M.Barrer, D.M.MacLeod, Trans. Farad. Soc., 51, 1290 (1955)
- [4] R.A.Schoonheydt, Stud. Surf. Sci. Catal., 58, 201 (1990)
- [5] N.Bjerrum, Z. Phys. Chem., 59, 349 (1907)
- [6] M.L.Occelli, R.A.Innes, F.S.S.Hwn, J.W.Hightower, Appl. Catal., 14, 69 (1985)
- [7] G.Johansson, Acta Chim. Scand., 16, 403 (1962)
- [8] G.Johansson, Arkiv. Kemi., 20, 305 (1963)
- [9] G.Johansson, Acta Chem. Scand., 14, 69 (1960)
- [10] R.A. Schoonheydt, K.Y.Jacobs, Stud. Surf. Sci. Catal., 137, 299 (2001)
- [11] S.Aceman, N.Lahav, S.Yariv, Appl. Clay Sci., 17, 99 (2000)
- [12] R.Herrera, M.Peech, Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 34, 740 (1970)
- [13] P.Cool, E.F.Vansant w Handbook of Layered Materials, (Eds. S.M.Auerbach, K.A.Corrado, P.K.Dutta), Marcel Dekker, Inc., New York, 2004, s. 261

- [14] T.J.Pinnavaia, T.Kwon, S.K.Kun w Zeolite Microporous Solids: Synthesis, Structure and Reactivity. (Eds. E.G.Deronane, F.Lemos, C.Naccache, F.Ramoa-Ribeiro), Kluwer, Dordrecht, 1992, Vol.352, s.91
- [15] T. Yanagisawa, T.Shimizu, K.Kuroda, C.Kata, Bull. Chem. Soc. Japan, 63, 988 (1990)
- [16] A. Galarneau, A. Barodawalla, T.J. Pinnavaia, Nature, 374, 529 (1995)
- [17] C.T. Kresge, M.E. Leonowicz, W.J. Roth, J.C. Vartuli, U.S. Patent 5,098,684

*Prof. Zenon Sarbak, Pracownia Adsorpcji i Katalizy w Ochronie Środowiska, Wydział Chemii UAM Poznań